**11 ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ СОСТОЯНИЙ.**

Временное УШ – линейное однородное дифференциальное уравнение. Поэтому, если его решениями являются , то решением будет и

с произвольными постоянными комплексными коэффициентами . Таким образом множество решений УШ, удовлетворяющих стандартным условиям, образует линейное векторное пространство над полем комплексных чисел. Пси-функции являются векторами этого пространства. Пси-функции можно умножать на комплексные числа и складывать, получая новую пси-функцию. В этом пространстве можно ввести скалярное произведение двух пси-функций (векторов)

антилинейное по первому множителю и линейное по второму. Здесь воспользовались обозначениями Дирака (удобные и широко распространенные в квантовой теории), в которых скалярное произведение обозначается угловыми скобками:. В этих обозначениях пси-функции , которая является вектором, заданным «в некотором смысле через проекции», ставится в соответствие вектор |. Как и в трехмерном пространстве вектору, заданному через его проекции (, так и соответствует .

Норма (длина) вектора

*Множество пси-функций, для которых определены скалярное произведение и норма, является гильбертовым пространством.*

Два вектора называют ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю

Покажем, что две пси-функции, отвечающие различным значениям энергии ортогональны. Запишем стационарные уравнения Шредингера для , умножим первое уравнение на , а второе на , далее второе уравнение комплексно-сопряжем, вычтем, результат проинтегрируем по большому объему . Получаем

Воспользуемся соотношением (аналог производной произведения)

и теоремой Остроградского-Гаусса

Если и нормированы, то они должны при стремиться к нулю достаточно быстро (быстрее, чем 1/, где *r* – радиус сферы, содержащей объем ). Поэтому при переходе к пределу получаем:

Здесь интегрирование ведется по всему объему.

В силу получаем

Пси-функции, отвечающие различным значениям энергии ортогональны.

Тому математическому факту, что множество пси-функций образует линейное векторное пространство, соответствует физический принцип суперпозиции: если квантовая система может находиться в состояниях описываемых и , то она может находиться и в состоянии описываемом

Пусть нормированные собственные функции оператора Гамильтона , отвечающие собственным значениям , которые неравны. Если измерять энергию у частицы, состояние которой описывается пси-функцией , то в результате этого измерения всегда получается значение , т.е. вероятность такого результата равна единице. При измерении энергии частицы в нормированном состоянии с некоторыми вероятностями мы получим результаты . Можно сделать довольно очевидное предположение, что вероятности получения этих результатов, определяются соотношением коэффициентов . С учетом того, что – комплексные числа полагаем, что вероятность получить значение энергии равна , а значение энергии - . Это предположение является частным случаем одного из основных постулатов квантовой механики (*постулат 3 §13*). Произведя измерений энергий одинаковых частиц, находящихся в одном и том же состоянии, мы получим значение в измерениях и значение в измерениях. При приближенное равенство переходит в точное. Среднее значение энергии при большом количестве измерений

Свойство ортогональности собственных векторов позволяет записать выражение для среднего значения энергии в виде

Доказательство проведем, воспользовавшись двумя обозначениями.

1.

,

**Далее можно не читать!**

2. В обозначениях Дирака. Действительно, в скалярное произведение подставим выражение ; воспользуемся линейностью оператора Гамильтона и тем, что , учтем антилинейность по первому множителю:

Итак, среднее значение энергии можно вычислять с помощью формулы

Этот результат является частным случаем одного из основных постулатов квантовой механики (*постулат 3 §13*).

Временное УШ для умножим на , запишем, также, комплексно-сопряженное уравнение УШ, умножим его на и вычтем полученные выражения:

Введя обозначения

приходим к уравнению непрерывности

аналогичному уравнению непрерывности электрического тока.